

# Eine Stammfunktion

von  $x^{\alpha-1} e^{\beta x}$

$(\alpha, \beta > 0)$

Christian Reinbothe  
Sudermanplatz 8 - 10  
50670 Köln  
Germany  
<http://WWW.Reinbothe.DE>

# 1. Hilfsmittel

**Def.:** Sei  $\mathcal{J}$  ein nicht leeres Intervall von  $\mathbb{R}$ .  
Sei  $\phi : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung.  
Wir definieren dann:

1.  $\phi : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  ist konvex genau dann, wenn
$$\forall x, y \in \mathcal{J} \quad \forall t \in [0; 1] \quad \phi(tx + (1-t)y) \leq t\phi(x) + (1-t)\phi(y)$$
2. Gelte  $\phi(\mathcal{J}) \subseteq \mathbb{R}_+$ .  
 $\phi : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  ist logarithmisch konvex genau dann, wenn  
 $\ln(\phi) : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  konvex ist.

**Bem.:** Gelte  $\phi(\mathcal{J}) \subseteq \mathbb{R}_+$ .  
Da  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konvex und monoton steigend ist, folgt:

$$\begin{aligned} (\phi : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist logarithmisch konvex}) &\Rightarrow \\ (\phi : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist konvex}) & \end{aligned}$$

**Satz:**

**Vor.:** Sei  $\mathcal{J}$  ein nicht leeres offenes Intervall von  $\mathbb{R}$ .  
Sei  $\phi : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Abbildung.

**Beh.:**  $(\phi : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist konvex}) \Leftrightarrow$   
 $(\phi' : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist monoton steigend})$

**Satz:**

**Vor.:** Sei  $\mathcal{J}$  ein nicht leeres offenes Intervall von  $\mathbb{R}$ .  
Sei  $\phi : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  eine 2-mal differenzierbare Abbildung.

**Beh.:**  $(\phi : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist konvex}) \Leftrightarrow$   
 $\phi'' \geq 0$

## 2. Gamma-Funktion

Die Gamma-Funktion  $\Gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  ist für  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  durch das absolut konvergente Integral

$$\Gamma(\alpha) := \underbrace{\int_0^{\infty} \tau^{\alpha-1} \cdot e^{-\tau} d\tau}_{>0}$$

definiert und es gilt:

$$\Gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist analytisch} \quad (1)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha) \quad (2)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \Gamma(k + 1) = k! \quad (3)$$

$$\Gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist logarithmisch konvex} \quad (4)$$

(also auch konvex)

$$\Gamma(1) = 1 \text{ und } \Gamma(2) = 1 \quad (5)$$

Mit (4) und (5) folgt offenbar:

$$\Gamma \mid [2; \infty[ \text{ ist monoton steigend} \quad (6)$$

### 3. Idee

Gelte  $x = (\text{id}_{\mathbb{R}}) | \mathbb{R}_+$ .

Wir definieren nun eine Funktion  $\gamma : ]-1; \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\forall u \in ]-1; \infty[ \quad \gamma(u) := \Gamma(u + 1)$$

Dann folgt mit (2):

$$\forall v \in ]-1; \infty[ \quad \gamma(v + 1) = (v + 1) \gamma(v) \quad (7)$$

Außerdem folgt mit (6):

$$\gamma | [1; \infty[ \text{ ist monoton steigend} \quad (8)$$

Weiter definieren wir für  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  die Funktion  $f_\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f_\alpha := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\gamma(n+\alpha)} \cdot x^{n+\alpha} = x^\alpha \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\gamma(n+\alpha)} \cdot x^n \right) \quad (9)$$

Dabei gilt wegen (3) und (8) für alle  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ,  $t \in \mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^k \left| \frac{(-1)^n}{\gamma(n+\alpha)} \cdot t^n \right| &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} + \sum_{n=1}^k \frac{1}{\gamma(n+\alpha)} \cdot |t|^n \leq \\ &\leq \frac{1}{\gamma(\alpha)} + \sum_{n=1}^k \frac{1}{\gamma(n)} \cdot |t|^n = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \sum_{n=1}^k \frac{1}{\Gamma(n+1)} \cdot |t|^n = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \sum_{n=1}^k \frac{1}{n!} \cdot |t|^n \leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} \cdot |t|^n \leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + e^{|t|} \end{aligned}$$

Daher definiert (9) eine differenzierbare Funktion und wegen (2), (7) und (9) gilt für alle  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ :

$$\begin{aligned}
 (f_\alpha)' &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\gamma(n+\alpha)} \cdot x^{n+\alpha} \right)' = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\gamma(n+\alpha)} \cdot (x^{n+\alpha})' = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+\alpha)}{\gamma(n+\alpha)} \cdot x^{n+\alpha-1} = \\
 &= \frac{\alpha}{\gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+\alpha)}{\gamma(n+\alpha)} \cdot x^{n+\alpha-1} = \\
 &= \frac{\alpha}{\gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+\alpha+1)}{\gamma(n+\alpha+1)} \cdot x^{n+\alpha} = \\
 &= \frac{\alpha}{\gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\gamma(n+\alpha)} \cdot x^{n+\alpha} = \\
 &= \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot x^{\alpha-1} - f_\alpha = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} - f_\alpha
 \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \left( \begin{array}{l} f_\alpha \text{ ist differenzierbar und} \\ \text{genügt der gewöhnlichen} \\ \text{linearen Differentialgleichung} \\ (y_\alpha)' + y_\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \text{ auf } \mathbb{R}_+ \end{array} \right) \quad (10)$$

## 4. Lösung der DGL

Nach [2] gilt der folgende Satz:

**Satz:**

**Vor.:** Sei  $J$  ein nicht leeres offenes Intervall von  $\mathbb{R}$ .  
Sei  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion.  
Sei  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion.  
Sei  $\xi \in J$ .  
Sei  $\eta \in \mathbb{R}$ .

**Beh.:** Das Anfangswertproblem

$$y' + g(t)y = h(t) \quad y(\xi) = \eta \quad t \in J \quad (11)$$

hat genau eine Lösung. Sie existiert in ganz  $J$ .

**Bem.:** Sei die Funktion  $G : J \rightarrow \mathbb{R}$  die Stammfunktion von  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $G(\xi) = 0$ , d. h.

$$\forall t \in J \quad G(t) = \int_{\xi}^t g(\tau) d\tau$$

Dann hat die Lösung des obigen Anfangswertproblems die folgende Gestalt:

$$\forall t \in J \quad y(t) = e^{-G(t)} \cdot \left( \eta + \int_{\xi}^t h(\tau) \cdot e^{G(\tau)} d\tau \right) \quad (12)$$

## 5. Anwendung des vorherigen Satzes

Sei  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ .

Gelte  $x = (\text{id}_{\mathbb{R}}) | \mathbb{R}_+$ .

Im konkreten Fall des Abschnitts 3. ist  $\mathcal{J} = \mathbb{R}_+$  und die Funktionen  $g : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  sind definiert durch

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathcal{J} \quad g(t) &:= 1 \\ \forall t \in \mathcal{J} \quad h(t) &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot t^{\alpha-1}\end{aligned}$$

Wir definieren nun eine Abbildung  $T_\alpha : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\forall t \in \mathcal{J} \quad T_\alpha(t) := \Gamma(\alpha) \cdot f_\alpha(t) \cdot e^t \quad (13)$$

Wir zeigen schließlich:

$T_\alpha$  ist eine Stammfunktion von  $x^{\alpha-1} \cdot e^x$  auf  $\mathbb{R}_+$

bzw.

$$\forall t, \xi \in \mathcal{J} \quad T_\alpha(t) - T_\alpha(\xi) = \int_{\xi}^t \tau^{\alpha-1} \cdot e^\tau \, d\tau \quad (14)$$

Beweis von (14):

Sei  $\xi \in J$ . Dann folgt für Stammfunktion  $G : J \rightarrow \mathbb{R}$  von  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $G(\xi) = 0$ :

$$\forall t \in J \quad G(t) = \int_{\xi}^t g(\tau) d\tau = t - \xi$$

Da  $f_{\alpha}$  nach (10) eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + g(t)y = h(t) \quad y(\xi) = f_{\alpha}(\xi) \quad t \in J$$

ist, folgt mittels des Satzes aus Abschnitt 4. und insbesondere (12) für alle  $t \in J$ :

$$\begin{aligned} f_{\alpha}(t) &= e^{\xi-t} \cdot \left( f_{\alpha}(\xi) + \int_{\xi}^t h(\tau) \cdot e^{\tau-\xi} d\tau \right) = \\ &= e^{-t} \cdot \left( f_{\alpha}(\xi) \cdot e^{\xi} + \int_{\xi}^t h(\tau) \cdot e^{\tau} d\tau \right) = \\ &= e^{-t} \cdot \left( f_{\alpha}(\xi) \cdot e^{\xi} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\xi}^t \tau^{\alpha-1} \cdot e^{\tau} d\tau \right) \end{aligned}$$

Dies lässt sich schließlich umformen:

$$\forall t \in J \quad \Gamma(\alpha) \cdot \left( f_{\alpha}(t) \cdot e^t - f_{\alpha}(\xi) \cdot e^{\xi} \right) = \int_{\xi}^t \tau^{\alpha-1} \cdot e^{\tau} d\tau$$

bzw.

$$\forall t \in J \quad T_{\alpha}(t) - T_{\alpha}(\xi) = \int_{\xi}^t \tau^{\alpha-1} \cdot e^{\tau} d\tau$$

Damit ist (14) gezeigt.

## 6. Grenzübergang

Sei  $\alpha \in \mathbb{R}_+$

Gelte  $x = (\text{id}_{\mathbb{R}}) | \mathbb{R}_+$ .

Wegen (9) gilt offenbar:

$$f_{\alpha} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist stetig fortsetzbar in } 0 \text{ und} \\ \lim_{\xi \rightarrow 0+} f_{\alpha}(\xi) = 0$$

Dann folgt mit (13):

$$T_{\alpha} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist stetig fortsetzbar in } 0 \text{ und} \\ \lim_{\xi \rightarrow 0+} T_{\alpha}(\xi) = 0$$

Daher folgt nach (14):

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \int_{\xi}^t \tau^{\alpha-1} \cdot e^{\tau} d\tau \text{ konvergiert f\u00fcr } (\xi \rightarrow 0+)$$

und

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad T_{\alpha}(t) = \lim_{\xi \rightarrow 0+} \int_{\xi}^t \tau^{\alpha-1} \cdot e^{\tau} d\tau = \int_0^t \tau^{\alpha-1} \cdot e^{\tau} d\tau$$

Man erh\u00e4lt eine Stammfunktion von  $x^{\alpha-1} \cdot e^{\beta x}$  durch die Substitution  $\tau \mapsto \beta\tau$  ( $\beta \in \mathbb{R}_+$ ).

## 7. Literaturverzeichnis

- [1] Jürgen Neukirch, „Algebraische Zahlentheorie“  
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
- [2] Wolfgang Walter, „Gewöhnliche Differentialgleichungen“  
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
- [3] Bronstein - Semendjajew „Taschenbuch der Mathematik“  
Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt (Main)
- [4] [www.Wikipedia.org](http://www.Wikipedia.org)
- [5] N. N. Lebedev, „Special Functions & Their Applications“  
Dover Publications, Inc., New York
- [6] Milton Abramowitz and Irene Stegun  
„Handbook of Mathematical Functions“  
Dover Publications, Inc., New York